Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 467–470
Comptes Rendus Mathematique

Géométrie algébrique/Théorie des nombres

Sur la cohomologie des systèmes locaux sur les espaces de modules des courbes de genre 2 et des surfaces abéliennes, II

Carel Faber [a], Gerard van der Geer [b]

[a] *Institutionen för Matematik, Kungliga Tekniska Högskolan, 10044 Stockholm, Suède*
[b] *Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam, Plantage Muidergracht 24, NL-1018 TV Amsterdam, Pays-Bas*

Reçu le 22 avril 2003 ; accepté après révision le 1er décembre 2003

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Nous étudions la cohomologie des systèmes locaux sur les espaces $\mathcal{M}_2$ de modules des courbes de genre 2 et $\mathcal{A}_2$ de modules des surfaces abéliennes. Nous donnons une formule explicite pour la cohomologie d'Eisenstein et une formule conjecturale pour la contribution endoscopique. Notre calcul des courbes sur des corps finis donne des renseignements précis sur les formes modulaires de Siegel. ***Pour citer cet article : C. Faber, G. van der Geer, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

On the cohomology of local systems on the moduli spaces of curves of genus 2 and of Abelian surfaces, II. We consider the cohomology of local systems on the moduli space of curves of genus 2 and the moduli space of Abelian surfaces. We give an explicit formula for the Eisenstein cohomology and a conjectural formula for the endoscopic contribution. We show how counting curves over finite fields provides us with detailed information about Siegel modular forms. ***To cite this article: C. Faber, G. van der Geer, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Cet article est la continuation de *Sur la cohomologie des systèmes locaux sur les espaces de modules des courbes de genre* 2 *et des surfaces abéliennes*, I [4] et nous référons les lecteurs à partie I pour les définitions et notations.

1. Calcul des points sur des corps finis

Soit p un nombre premier et $q = p^e$. Comme $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{M}_2$ sont définis sur $\mathbb{Z}$ on peut considérer $\mathcal{A}_2 \otimes \mathbb{F}_p$ et $\mathcal{M}_2 \otimes \mathbb{F}_p$ et on peut définir la trace $t(l,m,q)$ de la e-ième puissance de Frobenius pour la variante ℓ-adique de $\mathbb{V}_{l,m}$ sur $\mathcal{A}_2 \otimes \mathbb{F}_p$, cf. [2].

Pour certains q et pour une famille convenable de courbes $\mathcal{D} \to N$ de genre 2 avec $N \to \mathcal{M}_2$ fini nous avons déterminé les points rationnels $N(\mathbb{F}_q)$ et les polynômes de Weil des courbes correspondantes. Ainsi nous avons

Adresses e-mail : faber@math.kth.se (C. Faber), geer@science.uva.nl (G. van der Geer).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2003.12.025

calculé les fréquences des polynômes de Weil. (Cf. le cas $g=1$, où Birch [3] a fait des calculs analogues.) Divisant par le degré du recouvrement $N \to \mathcal{M}_2$ on trouve les fréquences pour le champ algébrique $\mathcal{M}_2$. Ce sont des nombres rationnels. (De façon équivalente : prendre un représentant X de chaque classe d'isomorphie sur $\mathbb{F}_q$, et sommer les $\mathrm{Tr}(F, V_{l,m}(H^1))/\#\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(X)$. Notons qu'une courbe sur un corps fini peut être définie sur son corps de modules.) En y ajoutant la contribution des courbes stables de genre 2 avec deux composantes elliptiques on peut déterminer les traces $t(l,m,q)$ pour ces valeurs de q. Nous l'avons fait pour $q \leqslant 37$, $q \neq 27$.

Supposant ainsi notre conjecture vraie nous pouvons calculer les traces des opérateurs de Hecke $T(p)$ sur les espaces $S_{j,k}$ pour tous les nombres premiers $p \leqslant 37$. Notons qu'en général, même si on a une formule explicite comme pour $F \in S_{6,8}$, il est très difficile de calculer les coefficients de Fourier et les valeurs propres des opérateurs de Hecke.

2. Polynômes caractéristiques de la forme modulaire F

Ici et dans la section suivante nous supposons vraie la conjecture sur la partie endoscopique. Pour une forme propre des opérateurs de Hecke $T(n)$ dans $S_{l-m,m+3}$ avec valeurs propres $\lambda(n)$, le polynôme caractéristique de Frobenius est donné par

$$1 - \lambda(p)X + \left(\lambda(p)^2 - \lambda\left(p^2\right) - p^{l+m+2}\right)X^2 - \lambda(p)p^{l+m+3}X^3 + p^{2l+2m+6}X^4,$$

cf. [1], p. 164. Nous donnons les polynômes caractéristiques de Frobenius pour p petit pour la forme $F \in S_{6,8}$ et les pentes de leurs polygones de Newton – Tableau 1. En utilisant les calculs des coefficients de Fourier de F de Ibukiyama, on peut contrôler $\lambda(2)=0$.

3. Exemples de valeurs propres des opérateurs de Hecke

Il y a 29 cas de paires régulières (l,m) tel que $\dim S_{l-m,m+3} = 1$. Dans ces cas les traces de $T(p)$ donnent les valeurs propres et nos résultats permettent de calculer ces valeurs propres pour $p \leqslant 37$. Pour le cas $(l,m) = (13,11)$ nos résultats sont en accord avec les calculs de Satoh de quelques valeurs propres sur $S_{2,14}$, cf. [7], p. 351. Pour illustrer ces résultats nous donnons (voir Tableau 2) les valeurs propres $\lambda(p)$ des opérateurs de Hecke $T(p)$ sur les espaces 1-dimensionnels $S_{8,8}$ et $S_{12,6}$ pour $p \leqslant 19$.

4. Les caractéristiques motiviques d'Euler de $\mathcal{M}_{2,n}$

Soit $\mathcal{M}_{1,n}$ (resp. $\mathcal{M}_{2,n}$) l'espace de modules des courbes lisses de genre 1 (resp. 2) avec $n > 0$ (resp. $n \geqslant 0$) points distincts ordonnés. C'est un champ algébrique de dimension n (resp. $3+n$) sur $\mathbb{Z}$. Soit $\overline{\mathcal{M}}_{2,n}$ la compactification qui donne les modules des courbes stables avec n points. On considère les caractéristiques motiviques d'Euler $e_c(\mathcal{M}_{2,n})$ et $e_c(\overline{\mathcal{M}}_{2,n})$. Getzler [5] a déterminé ces caractéristiques pour $n \leqslant 3$.

Tableau 1
Polynômes caractéristiques et les pentes pour p petit

p	$\lambda(p)$	$\lambda(p^2)$	Pentes
2	0	−57344	13/2, 25/2
3	−27000	143765361	3, 7, 12, 16
5	2843100	−7734928874375	2, 7, 12, 17
7	−107822000	4057621173384801	0, 6, 13, 19

Tableau 2
Les valeurs propres, $\lambda(p)$

p	$\lambda(p)$ sur $S_{8,8}$	$\lambda(p)$ sur $S_{12,6}$
2	$2^6 \cdot 3 \cdot 7$	$-2^4 \cdot 3 \cdot 5$
3	$-2^3 \cdot 3^2 \cdot 89$	$2^3 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7$
5	$-2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13^2 \cdot 607$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 79 \cdot 89$
7	$2^4 \cdot 7 \cdot 109 \cdot 36973$	$-2^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 119633$
11	$2^3 \cdot 3 \cdot 4759 \cdot 114089$	$2^3 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 2267 \cdot 2861$
13	$-2^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 109 \cdot 3404113$	$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 50083049$
17	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 1307 \cdot 168331$	$-2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 47 \cdot 14320807$
19	$-2^3 \cdot 5 \cdot 74707 \cdot 9443867$	$-2^3 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 19 \cdot 2377 \cdot 35603$

Il y a une relation entre $e_c(\mathcal{M}_{1,n})$ et les $e_c(\mathcal{A}_1, \mathbb{W}_k)$ et Getzler [6] l'a écrite explicitement sous la forme élégante

$$e_c(\mathcal{M}_{1,n+1})/n! = \mathrm{Res}_0\left[\binom{L-\omega-L/\omega}{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{S[2k+2]+1}{L^{2k+1}}\right)\omega^{2k}-1\right)\cdot\left(\omega-\frac{L}{\omega}\right)\mathrm{d}\omega\right],$$

où L est le motif de Tate et Res_0 veut dire le residu en $\omega = 0$. Pour $g = 2$ on a une relation analogue, aussi due à Getzler et cela nous permet de calculer $e_c(\mathcal{M}_{2,n})$ quand on connait les $e_c(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m})$ et les $e_c(\mathcal{A}_{1,1}, \mathbb{V}_{l,m})$ avec $l + m \leqslant n$.

Nous avons calculé pour $p \leqslant 233$ et $q = 2^k$ avec $1 \leqslant k \leqslant 7$ les fréquences des courbes avec un nombre donné de points rationnels sur $\mathbb{F}_p$ et $\mathbb{F}_q$ et cela nous a permis de calculer $\#\mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{F}_p)$ et $\#\mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{F}_q)$. Cela fournit un contrôle pour les $e_c(\mathcal{M}_{2,n})$ que nous avons trouvés. Pour $n \leqslant 16$ nous connaissons la partie endoscopique et par conséquent nous connaissons $e_c(\mathcal{M}_{2,n})$. Nous donnons quelques exemples.

$$\begin{aligned}
e_c(\mathcal{M}_{2,10}) = {} & L^{13} + 10L^{12} - 120L^{11} - 420L^{10} + 8253L^9 - 38931L^8 + 95927L^7 \\
& - 156313L^6 + 212730L^5 - 189334L^4 - 166663L^3 + 604236L^2 \\
& - 233280L - 302400 + (L-9)S[12], \\
e_c(\mathcal{M}_{2,16}) = {} & A(L) + B(L)S[18] + C(L)S[16] + D(L)S[12] + 2548\, e_c(\mathcal{M}_2, \mathbb{V}_{11,5}),
\end{aligned}$$

où

$$e_c(\mathcal{M}_2, \mathbb{V}_{11,5}) = -S[6,8] - (L+1)S[12] - L^5 - 2L^4 - 2L^3 - 2L^2 - 2L - 2$$

avec $S[6,8]$ le « motif » des formes modulaires de Siegel de poids $(6,8)$ et

$$\begin{aligned}
A(L) = {} & L^{19} + 16L^{18} - 560L^{17} - 9828L^{16} + 441714L^{15} - 6084744L^{14} + 41896790L^{13} \\
& - 109303012L^{12} - 635722737L^{11} + 8143511948L^{10} - 43836908908L^9 \\
& + 144755642044L^8 - 279604866542L^7 + 109307474312L^6 \\
& + 1000400749388L^5 - 2508087212954L^4 + 1168650933424L^3 \\
& + 3250035688136L^2 - 2584542638104L - 1743565818904
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
B(L) &= -51480L^2 + 649792L - 2102115, \\
C(L) &= -1560L^2 + 19175L - 64260, \\
D(L) &= 8008L^7 - 264264L^6 + 4086368L^5 - 39326716L^4 + 256866324L^3 \\
&\quad - 1125323276L^2 + 2979292862L - 3563125592.
\end{aligned}$$

Vu la grandeur des coefficients dans ces formules il est préférable de travailler avec les $e_c(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m})$ et les $e_c(\mathcal{M}_2, \mathbb{V}_{l,m})$.

Remerciements

Nous remercions P. Deligne, G. Harder, A.J. de Jong et J.-P. Serre de leurs remarques sur une version préliminaire de ce manuscrit et T. Ibukiyama pour une correspondance utile. Enfin, nous remercions S. del Baño, notre collaborateur dans le premier phase de ce projet.

Références

[1] T. Arakawa, Vector valued Siegel's modular forms of degree 2 and the associated Andrianov L-functions, Manuscr. Math. 44 (1983) 155–185.
[2] K. Behrend, The Lefschetz trace formula for algebraic stacks, Invent. Math. 112 (1) (1993) 127–149.
[3] B. Birch, How the number of points of an elliptic curve over a fixed prime field varies, J. London Math. Soc. 43 (1968) 57–60.
[4] C. Faber, G. van der Geer, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).
[5] E. Getzler, Topological recursion relations in genus 2, in: Integrable Systems and Algebraic Geometry (Kobe/Kyoto, 1997), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1998, pp. 73–106.
[6] E. Getzler, Resolving mixed Hodge modules on configuration spaces, Duke Math. J. 96 (1999) 175–203.
[7] T. Satoh, On certain vector valued Siegel modular forms of degree 2, Math. Ann. 274 (1986) 335–352.