Knopen

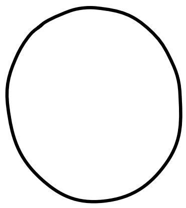
Gerard van der Geer

Iedereen weet hoe je een knoop in een touwtje kunt leggen. Die knoop kun je er daarna ook weer uithalen. Dat lukt echter niet altijd meer als je de uiteinden van het touwtje met elkaar verbindt. Daardoor ontstaat dan een cirkelvormige figuur die om zichzelf verstrengeld is: een knoop. Daarom neemt de wiskundige als definitie van een knoop: *een cirkel die in de 3-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$ is ingebed.* De eerste vraag die dan opkomt is of deze knoop te ontwarren is of dat we te maken hebben met een echte knoop. Een knoop ontwarren betekent hier: de knoop continu deformeren zodat de triviale knoop ontstaat:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}. \tag{1}$$

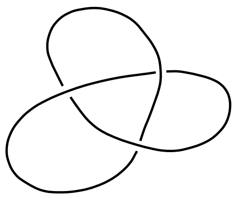
Hierbij moeten de spelregels wel duidelijk vastgelegd worden. Zo is het niet toegestaan de knoop oneindig klein te maken en daarmee te laten verdwijnen, alhoewel onze draad oneindig dun is. De deformatie wordt gegeven door een continue familie $\{h_t : 0 \leq t \leq 1\}$ van deformaties $h_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ van de omringende ruimte, die de knoop in een cirkel overvoeren terwijl de tijd van 0 tot 1 loopt. Hierbij is h_0 de identiteit, en iedere h_t is een homeomorfisme, d.w.z., een continue bijectieve afbeelding waarvoor de inverse afbeelding ook continu is. Terwijl de tijd loopt blijft het touwtje dus intact; het mag niet 'breken'. Je kunt de deformatie van de knoop vergelijken met de beweging van het touwtje in een vloeistof; de omringende vloeistof wordt meebewogen.

Laat ik eerst wat voorbeelden van knopen geven: de triviale knoop gegeven door de vergelijking (1)



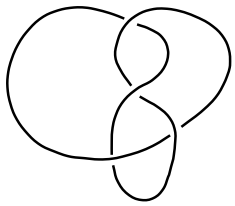
triviale knoop

en bekende knopen als



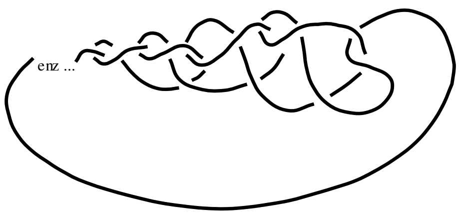
klaverbladknoop

en



cijfer 8-knoop

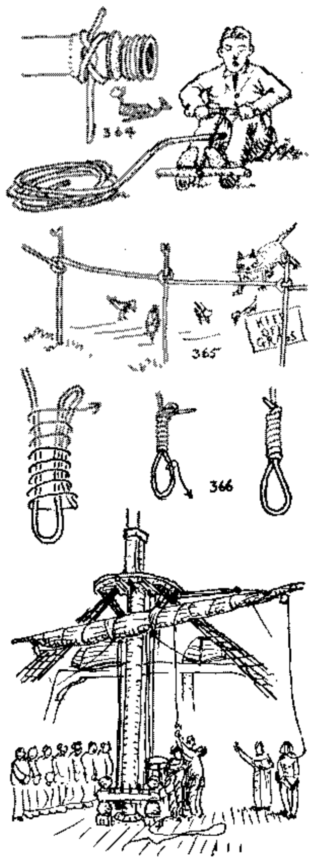
of een wat vervaarlijker type



Een wilde knoop

Laatstgenoemde knoop laat zich ontwarren door rechts aan de knoop te trekken; maar daarvoor hebben we wel oneindig veel tijd nodig. Dit soort knopen zijn ook veel wiskundigen te wild en wij zullen ons alleen met *tamme* knopen bezighouden.

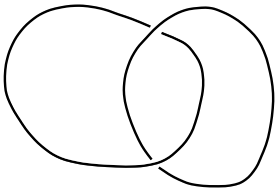
Knopen vinden we overal in het dagelijks leven, bij het zeilen, bij de kleermaker, in onze veters en zelfs de beul heeft zijn eigen knoop:



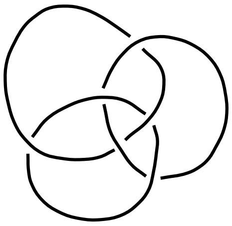
Knoop van de Beul; uit: The Ashley Book of Knots

In de voorbeelden werden de knopen met een figuur of diagram in het vlak aangegeven. Zo een figuur heet een *knopendiagram*. Je kunt zo een figuur opvatten als een schaduw van de knoop, waarbij we boven- en onderkruisingen hebben gemarkeerd. Een probleem daarbij is dat een en dezelfde knoop veel verschillende knopendiagrammen kan hebben.

Er is geen reden om ons te beperken tot één cirkelfiguur; vaak komen we er meer tegen. Dus krijgen we een variatie op ons thema door meerdere cirkels in de drie-dimensionale ruimte in te bedden. Het resultaat heet dan een *schakel* of *verstrengeling*. Hier zijn een paar voorbeelden:



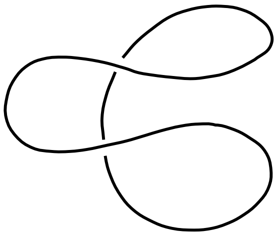
Hopf-schakel



Borromeïsche ringen

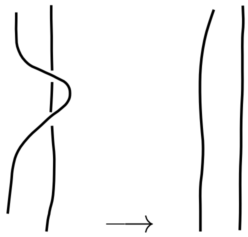
De laatste schakel heeft de bijzondere eigenschap dat het verwijderen van één cirkel ervoor zorgt dat de beide anderen niet meer geschakeld zijn.

Knopen die we door een deformatie als boven in elkaar kunnen overvoeren heten equivalent of 'knopen van hetzelfde type'. Zo beschouwen we bijvoorbeeld de volgende knoop als gelijkwaardig met de triviale knoop



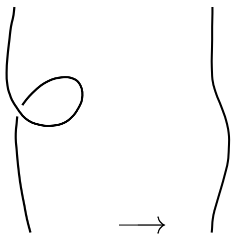
Triviale knoop incognito

Dat betekent dat we in het diagram de volgende beweging of 'zet' mogen uitvoeren



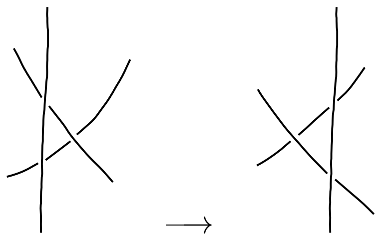
Reidemeisterzet II

Ook de volgende bewegingen of zetten zijn toegestaan



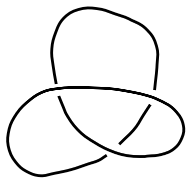
Reidemeisterzet I

en



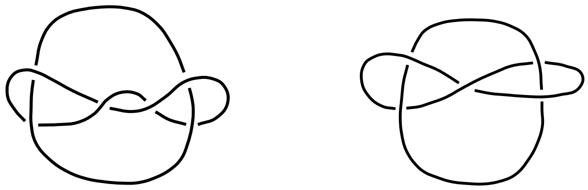
Reidemeisterzet III

zoals men ziet door de projectie (schaduw) een beetje te deformeren. Ik geef nu een aantal equivalente diagrammen. De triviale knoop komt in vele vermommingen voor:

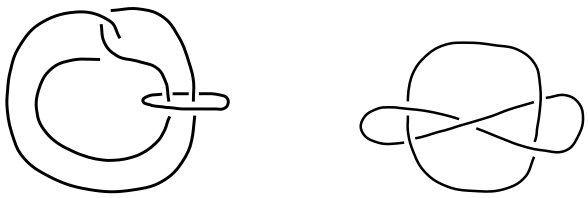


Triviale knoop vermomd

Het is niet moelijk de benodigde Reidemeisterzetten te vinden, zoals ook bij het volgende paar



of bij het paar



Maar vaak is het niet zo simpel.

De Duitse wiskundige Kurt Reidemeister heeft laten zien dat twee verschillende diagrammen precies dan hetzelfde knopentype in de ruimte voorstellen, als de beide diagrammen door herhaalde toepassing van de Reidemeisterzetten in elkaar kunnen worden overgevoerd. Helaas is er geen goed algoritme om dit in de praktijk uit te voeren. Dat leidt tot het hoofdprobleem van de knopentheorie: *Hoe kan men vaststellen of twee knopendiagrammen (schakeldiagrammen) dezelfde knoop (schakel) voorstellen?* Dat het ons na lang proberen niet gelukt is het ene diagram door Reidemeisterzetten in het andere over te voeren zegt misschien maar weinig over de knoop, maar meer over ons eigen onbegrip.

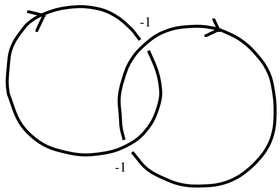
Soms is het echter wel mogelijk vast te stellen dat twee knopen of schakels niet van hetzelfde type zijn. Daarvoor worden *invarianten* gebruikt. Ik probeer dit met een voorbeeld duidelijk te maken. Neem een diagram van een schakel die uit twee al dan niet verstrengelde cirkels bestaat. We bekijken daarin uitsluitend de kruisingen van de twee cirkels, dus niet de kruisingen waar een cirkel zichzelf kruist. We voorzien de twee cirkels elk van een oriëntatie, dat wil zeggen een looprichting. Voor zo'n kruising zijn er dan twee mogelijkheden (eventueel na draaien van het diagram):

+1 of −1

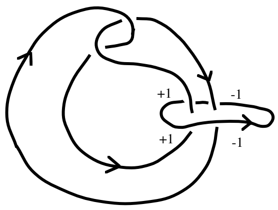
(dwz. het is +1 als je op de bovenkruising aankomt en het verkeer beneden komt van rechts). Op deze manier kunnen we iedere kruising van beide cirkels een voorteken ϵ voorzien; we tellen al deze voortekens op en noemen de helft van de totale sum "het schakelgetal":

$$\ell(K) = \frac{1}{2}\sum \epsilon.$$

Als we op een van de twee cirkels de orientatie omkeren dan keert het teken van $\ell(K)$ ook om: $\ell(K) \mapsto -\ell(K)$. Hier volgen eerst twee voorbeelden:



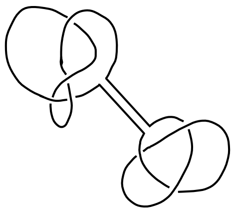
Hopf-schakel met schakelgetal: $\frac{-1-1}{2} = -1$



Whitehead-schakel met schakelgetal: 0

Men gaat nu na dat het schakelgetal van zo een schakeldiagram niet verandert onder toepassing van Reidemeisterzetten. (Omdat we alleen naar kruisingen van de twee cirkels en niet die van een cirkel met zichzelf kijken, spelen alleen zetten van type II en III een rol; daarvoor is het niet moeilijk.) Daarmee hebben we nu een invariant van schakels met twee cirkels gevonden. Zijn twee zulke schakels van hetzelfde type, dan zijn hun schakelgetallen gelijk. We zien nu bijvoorbeeld dat de Hopfschakel en de Whiteheadschakel niet van hetzelfde type zijn.

Knopen kan men net als getallen met elkaar vermenigvuldigen: men verbindt beide knopen als in de figuur.



De knopen die zo ontstaan heten samengestelde knopen. Knopen die men niet ontbinden kan heten *priemknopen*. Er zijn zeer veel priemknopen en daarmee ook vele knopen. Het aantal priemknopen met k kruisingen is een exponentiële functie van k; voor lage waarden van k is dit aantal in de volgende tabel aangegeven.

#kruisingen	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
#priemknopen	1	1	2	3	7	21	49	165	552	2176	9988	?

Het aantal priemknopen met 14 kruisingen is nog niet bekend.

Geschiedenis van de Knopentheorie

Het is een goede gewoonte de geschiedenis van welk thema dan ook in de klassieke oudheid te laten aanvangen, en ik sluit me graag aan bij deze traditie. Zo dus: het eerst bekende probleem uit de knopentheorie is de *Gordiaanse Knoop*. In Gordion, een stad in Frygië (in het huidige Turkije), stond bij de tempel voor Zeus een ossenkar waarmee volgens een legende Midas de stad in gekomen was voor hij tot koning gekroond werd. Volgens overlevering zou diegene koning van de wereld worden, die de reusachtige knoop los zou maken waarmee de kar aan de tempel vastgemaakt was. Toen Alexander de Grote, koning van Macedonië, in het jaar –334 Gordion veroverde ging hij de beroemde knoop bekijken en hij ruimde het probleem resoluut uit de weg zoals we van hem mogen verwachten. (Hoe hij de knoop precies losmaakte, daarover verschillen de bronnen van mening; bij Plutarchos kan men de verschillende versies nalezen.)

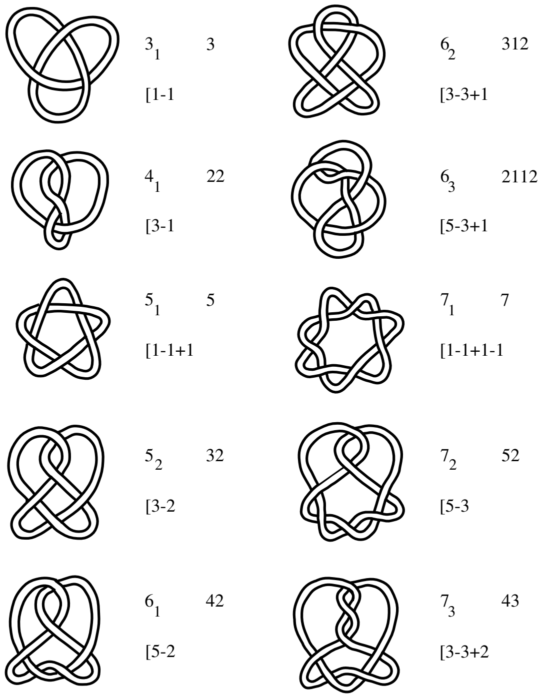
Het heeft lang geduurd voordat de knopen de aandacht van de geleerden trokken. C.F. Gauss was misschien de eerste die knopen als wiskundige objecten beschouwde, maar hij heeft er nauwelijks over gepubliceerd. Zijn leerling J.B. Listing wijdde een gedeelte van zijn boek *Vorstudien zur Topologie* aan knopen. Maar men zou met recht kunnen beweren dat de knopentheorie pas tot ontwikkeling is gekomen door de pogingen van Lord Kelvin (Willam Thompson, 1824–1907, Edinburgh) om de aard van atomen te begrijpen. Hij had het idee dat atomen knopen in de ether waren. De ether was hierbij een hypothetische substantie, waarvan de hele ruimte doortrokken was. Hij uitte zijn idee in het jaar 1869 (On vortex motion, *Trans. Royal Soc. Edinburgh* **25**, 217–260). Verschillende knopen zouden tot verschillende atomen, dus ook tot verschillende chemische elementen aanleiding geven. Dat elementen stabiel zijn, zou een extra voorwaarde in dit model zijn. Hij hoopte op deze manier niet alleeen de elementen, maar ook de spectraallijnen in de stralingsspectra te kunnen verklaren. Ik moet toegeven, dat ik dit nog steeds een zeer aantrekkelijk idee vind. Het zou de veelheid van de elementen kunnen verklaren en ook hoe elementen door transmutaties in elkaar overgaan.

De eerste classificatie van knopen stamt van de dominee Thomas P. Kirkman (The enumeration, description and construction of knots with fewer than 10 crossings. *Trans. Royal Soc. Edinburgh* **32**, (1884), p. 281–309.) Helaas zijn

zijn geschriften niet erg toegankelijk. De Schotse natuurkundige Peter Guthrie Tait (1831–1901) heeft de methoden van Kirkman gebruikt en geprobeerd knopen te classificeren om zo het idee van Lord Kelvin te verwezenlijken en de verschillende elementen (in de zin van de scheikunde) te bepalen. Twintig jaar lang werd het idee van Lord Kelvin serieus bestudeerd. Maxwell merkte op dat dit atoommodel aan meer voorwaarden voldeed dan alle andere. Maar helaas (?!) is de ether verdwenen en daarmee ook dit atoommodel.

Terwijl Tait knopen klassificeerde, werkte tegelijkertijd ook de Amerikaanse wiskundige C.N. Little daaraan; ook hij maakte gebruik van de lijsten van Kirkman. In 1899 publiceerde hij een lijst van (niet-alternerende) knopen met 10 kruisingen.* Bij deze klassificatie werden heuristische principes, onbewezen aannames, gebruikt. Veel daarvan golden tot voor kort nog als vermoedens.

Ik geef hieronder de eerste bladzijde van een moderne klassificatie (uit D. Rolfsen: *Knots and Links*).



Classificatie

Langzamerhand begonnen steeds meer wiskundigen zich voor knopen te interesseren, maar het systematische onderzoek naar knopen ontwikkelde zich pas in de 20ste eeuw. In dit verband moeten de namen van M. Dehn, J.W. Alexander en natuurlijk K. Reidemeister, die we al tegenkwamen, genoemd worden; daarbij hoort ook de naam van Emil Artin (Theorie der Zöpfe, 1925).

De eerste mijlpaal was het Alexanderpolynoom (1928); daar kom ik later op terug. Het boek van Reidemeister (Knopentheorie, 1932) vat de resultaten van dit eerste tijdvak goed samen.

---

* Een fout in de lijst van Little werd pas in 1974 door de jurist Perko uit New York ontdekt.

De knopentheorie ontwikkelde zich dan gedurende meer dan vijftig jaar gestaag verder. Van de hoger-dimensionale topologie en meetkunde, die zojuist was ontwikkeld, werd dankbaar gebruik gemaakt om knopen beter te begrijpen. Maar dan vindt in 1984 plotseling een ware revolutie plaats, die deze hele tak van wiskunde dramatisch verandert. Terugblikkend op de eerdere periode moet men constateren dat de het tijdvak 1930–1984 weliswaar vooruitgang, maar geen grote doorbraken heeft gebracht.

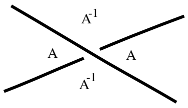
In 1984 ontdekt Vaughan Jones, een wiskundige uit Nieuw-Zeeland, een nieuwe invariant van knopen, het *Jones-polynoom*. Deze invariant is niet afkomstig uit de hoger-dimensionale meetkunde, maar via een omweg (zie later) direct uit de knopendiagrammen. Jones heeft hiervoor de Fieldsmedaille, de belangrijkste onderscheiding voor wiskundig werk, gekregen. Ons voert het nu, na een lijst met de belangrijkste namen uit de knopentheorie, tot het volgende thema.

C.F. Gauss (1777-1855), J.B. Listing (1808-1882), W. Thompson (Lord Kelvin; 1824-1907), J.C. Maxwell (1831-1879), Th. P. Kirkman (1806-1895), P.G. Tait (1831-1901), C.N. Little, J.W. Alexander (1888-1971), M. Dehn (1878-1952), W. Burau, H. Seifert (1907-), E. Artin (1898-1962), K. Reidemeister (1893-1971), J.H. Conway (1937-), V. Jones (1952-), V. Vassiliev (19??).

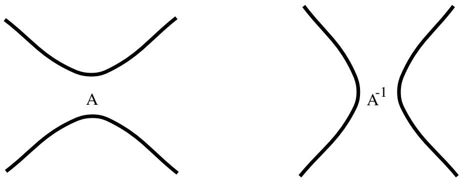
Polynomen

We spelen nu een spel met een knoopdiagram en ik hoop dat u meespeelt. De regels zijn eenvoudiger dan die van het schaakspel. We illustreren ze aan de hand van het voorbeeld van de Hopfschakel.

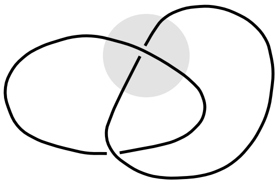
Eerste stap. Neem een kruising uit het diagram van de schakel. In de vier gebieden noteren we afwisselend de uitdrukkingen A en A^{-1}. Het wordt zo gedaan, dat als je op de bovenste weg van het kruispunt rijdt je voor aankomst bij de kruising het A-gebied aan de rechterhand hebt.



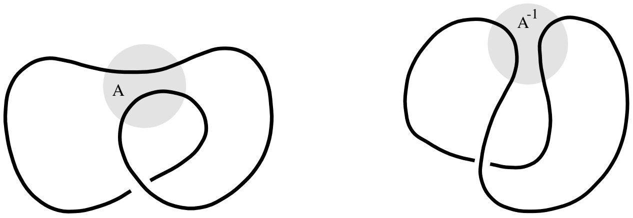
We kunnen nu op twee verschillende manieren de kruising opheffen om zo een eenvoudiger figuur te krijgen; de een wordt genoteerd met A, de andere met A^{-1} (afhankelijk van welke gebieden worden verbonden):



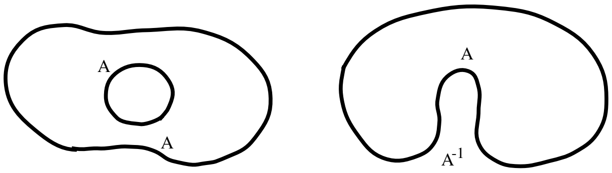
We krijgen op deze manier uit het voorbeeld van de Hopfschakel



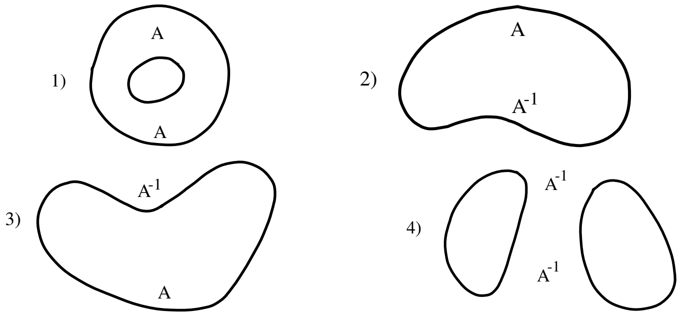
twee nieuwe schakeldiagrammen die zijn voorzien van een symbool (A of A^{-1}).



Tweede stap. We nemen nu op elk van de diagrammen een willekeurige kruising en voeren de eerste stap weer uit. Uit het eerste diagam ontstaan twee nieuwe



en uit het andere ook, zodat we in totaal nu vier diagrammen vinden die met symbolen A of A^{-1} versierd zijn:



de vier diagrammen

Voorlaatste stap. Nu er geen kruising meer voorhanden is om het proces te herhalen doen we de boekhouding voor het totaal: we nemen het product van de symbolen in iedere figuur en vermenigvuldingen het met de uitdrukking

$$(-A^2 - A^{-2})^{\ell-1},$$

waarbij ℓ het aantal cirkels in de figuur is. Voor de vier figuren in het bovenstaande voorbeeld levert dat de producten

$$\begin{aligned} A^2 \cdot (-A^2 - A^{-2})^1 &= -A^4 - 1, \\ 1 \cdot (-A^2 - A^{-2})^0 &= 1, \\ 1 \cdot (-A^2 - A^{-2})^0 &= 1, \\ A^{-2} \cdot (-A^2 - A^{-2})^1 &= -1 - A^{-4}, \end{aligned}$$

Optellen levert in totaal:

$$\mathcal{K} = -A^{-4} - A^{4}.$$

Deze uitdrukking $\mathcal{K} = \mathcal{K}(K)$ heet *Kauffman-haakje* van K, en wordt ook wel genoteerd als $\langle K \rangle$, vanwaar de naam. We kunnen deze stappen, misschien vaak herhaald, voor ieder diagram uitvoeren. Een diagram met k kruisingen levert na dit proces 2^k diagrammen, waarvan men de uitdrukkingen moeten uitrekenen en optellen. Deze 2^k diagrammen noemen we de '*toestanden*' van de knoop.

Wat gebeurt er als we voor dezelfde knoop of schakel een ander diagram kiezen? Het aardige is nu dat de uitdrukking $\mathcal{K}$ niet verandert onder toepassing van Reidemeisterzetten van type II en type III ! Rest ons nog na te gaan hoe het zit met die van type I. We kiezen nu een oriëntatie op (iedere component van) de knoop of schakel. Iedere kruising kan dan van een voorteken worden voorzien:

voorteken $+1$ en voorteken -1

Laatste stap. Laat nu $w(K)$ de som van de voortekens van het diagram K zijn. Men kan dan nagaan dat de uitdrukking

$$P(K) = (-A^3)^{-w(K)} \times \mathcal{K}(K)$$

niet verandert onder *alle* Reidemeisterzetten. Dat wil zeggen: we hebben een invariant van de knoop of schakel gevonden; deze hangt er niet vanaf hoe we de knoop of schakel met een diagram presenteren, alleen maar van het type van de schakel.

Voorbeeld. Voor de Hopf-schakel (met de eerder gegeven oriëntatie) vinden we:

$$P(K) = (-A^3)^2 \times (-A^{-4} - A^4) = -A^{-2} - A^{10},$$

en voor de klaverbladknoop

$$\begin{aligned} P(K) &= (-A^3)^{-3} \times (-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) \\ &= A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}. \end{aligned}$$

Wat het nut hiervan is zien we direct:

Stelling. *De klaverbladknoop is een echte knoop. De klaverbladknoop en zijn spiegelbeeld zijn verschillende knopen.*

Bewijs. Als de klaverbladknoop triviaal was, dan zou hij hetzelfde polynoom P hebben als de triviale knoop, d.w.z. 1. Dat is echter niet het geval. De klaverbladknoop is niet van hetzelfde type als zijn spiegelbeeld, omdat onder het spiegelen het symbool A in A^{-1} overgaat, terwijl het polynoom $A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$ verschillend is van $A^4 + A^{12} - A^{16}$. $\square$

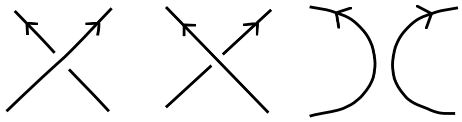
Het *Jones-polynoom* wordt nu uit P verkregen door A te vervangen door $t^{1/4} = \sqrt[4]{t}$. Het is een Laurent-polynoom, d.w.z. een veelterm in $t^{1/4}$ plus een veelterm in $t^{-1/4}$. We kunnen deze invariant nu ook met axioma's definiëren. Maar merk op dat het a priori helemaal niet duidelijk is of er wel een invariant bestaat die aan deze axioma's voldoet en of die eenduidig vastligt.

Axioma's. Het Jones-polynoom $V_K(t)$ van een geöriënteerde knoop K is een Laurent-polynoom in $\sqrt[4]{t}$ met de volgende eigenschappen:

i) Als K_1 en K_2 equivalente geöriënteerde knopen zijn dan $V_{K_1}(t) = V_{K_2}(t)$;
ii) $V_K(t) = 1$ voor de triviale knoop K;
iii) Er geldt de schematische relatie:

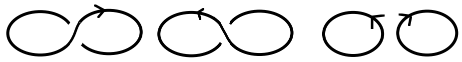
$$\frac{1}{t}V_{K_+} - tV_{K_-} = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})V_{K_0},$$

waarbij de knoop K_- (respectievelijk de knoop K_0) uit de knoop K_+ ontstaat door één kruising van type $+$ te vervangen door een van type $-$ (respectievelijk van type 0), zie de figuur.



K_+ K_- K_0

Het Jones-polynoom voldoet aan de regels i) en ii). Met een berekening volgt dat het Jones-polynoom ook aan iii) voldoet. (Probeer dit zelf!) Dat polynoom is door de regels i), ii) en iii) ook volledig bepaald. Daarmee kunnen we nu snel rekenen, Neem bijvoorbeeld de knoop K_+ uit het rijtje van drie knopen hieronder



K_+ K_- K_0

Het is niet moeilijk in te zien dit dit een vermomde triviale knoop is, evenals K_- en dus dat regel iii) zegt

$$\frac{1}{t} - t = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})V_{K_0},$$

waaruit volgt dat $V_{K_0} = -(\sqrt{t} + 1/\sqrt{t})$.

Het nut van dit polynoom is nu dat je ermee kunt laten zien dat vele knopen of schakels echt verchillend zijn door gewoon het polynoom uit te rekenen. Maar we kunnen er meer mee doen zoals in de volgende paragraaf zal blijken.

Het Jones-polynoom is een wezenlijke verfijning van een eerdere invariant, het *Alexanderpolynoom*, die al in 1928 was gevonden door Alexander, met behulp van de topologie. Het Alexander-polynoom $A_K(t)$ kan ook door axioma's als voor het Jonespolynoom worden gegeven. Het verschil met het Jonespolynoom zit in regel iii), die nu luidt iii)' Er geldt de schematische relatie:

$$A_{K_+}(t) - A_{K_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})A_{K_0},$$

Zo vinden we nu voor K = twee disjuncte cirkels dat $A_K = 0$; voor de Hopfschakel vinden we $A_K = t^{-1/2} - t^{1/2}$ en voor de klaverbladknoop $A_K = t^{-1} - 1 + t$. Conway definieerde een variant $C_K(t)$ daarvan door naast regels i) en ii) als derde regel te nemen

$$C_{K_+}(t) - C_{K_-}(t) = tC_{K_0}.$$

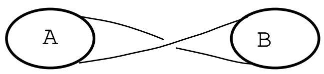
Dit is dan een polynoom $C_K = c_0+c_1t+c_2t^2+\ldots+c_mt^m$ in t. Het blijkt dat $c_0 = 1$ als het aantal componenten van de schakel K gelijk aan 1 is, en $c_0 = 0$ anders, en dat c_1 het schakelgetal is als K uit precies 2 componenten bestaat en $c_1 = 0$ anders. Deze coëfficiënten c_i zijn voorbeelden van geheel nieuwe invarianten die in de afgelopen jaren door Vassiliev zijn gedefinieerd en die alle eerder bekende invarianten omvatten. Het is niet bekend of deze Vassiliev-invarianten alle knopen geheel karakteriseren. Het is een nog openstaand vermoeden dat dit inderdaad het geval is.

Jones heeft zijn polynoom niet gevonden door op boven aangegeven manier met knopendiagramen te spelen. Hij werkte op een heel ander gebied van de wiskunde, de functionaalanalyse, en stootte bij zijn onderzoek aan oneindig-dimensionale ruimten op een algebraïsche structuur die je ook bij knopen vindt. Dit bracht hem op het idee voor zijn invariant. Later heeft men de eenvoudiger benadering met diagrammen gevonden. Zo lijkt het telkens weer te gaan in de knopentheorie: via grote omwegen komt men uiteindelijk uit bij begrippen die men direct met de diagrammen kan definiëren. Het lijkt erop dat de omweg nodig is om bij de definitie uit te komen.

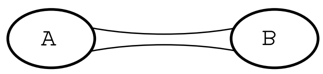
Een oud vermoeden van Tait

In deze paragraaf bekijken we *alternerende* knopendiagrammen: dat zijn diagrammen waar je bij het doorlopen van de knoop afwisselend een onderkruising en een bovenkruising tegenkomt. De cijfer-8-knoop bijvoorbeeld, zoals in de inleiding gegeven, heeft een alternerend diagram

We noemen zo een alternerend diagram *gereduceerd* als het niet de volgende gedaante heeft



Zo een diagram kunnen we immers vereenvoudigen door B op te pakken en om te draaien zodat de kruising verdwijnt:

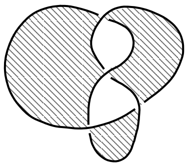


Intuïtief lijkt het alsof er aan een alternerend diagram dat gereduceerd is niet veel meer te vereenvoudigen is. Inderdaad formuleerden Tait en de andere knopenklassificeerders van het eerste uur het volgende heuristische principe.

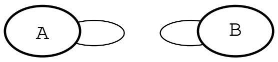
Vermoeden. *Het aantal kruisingen in een samenhangend gereduceerd alternerend diagram van een knoop K hangt niet van de keuze van dat diagram af.*

Dit vermoeden werd in 1987 bewezen door Kauffman en onafhankelijk van hem ook door de Japanse wiskundige Murasagi. We schetsen het bewijs van Kauffman, dat het Jonespolynoom gebruikt.

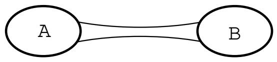
Laat K een samenhangend alternerend knoop- of schakeldiagram zijn. We voorzien het diagram eerst van een dambordpatroon (wit/zwart). Hierbij wordt het buitenste gebied wit gelaten en twee gebieden die aan elkaar grenzen langs een stuk van de knoop hebben verschillende kleuren, zoals in onderstaand voorbeeld.



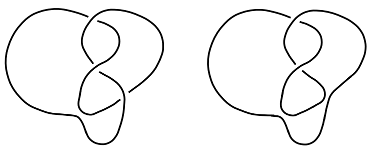
Het is niet moeilijk in te zien dat dit altijd kan. Namelijk, hef een voor een alle kruisingen op terwijl je ervoor zorgt het diagram samenhangend blijft. Gaat dat op een gegeven moment mis, d.w.z. zou het diagram niet meer samenhangend zijn, dan ziet het er zo uit



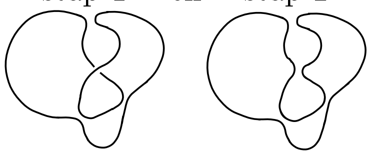
maar dan zou de andere splitsing



samenhangend zijn. We vinden uiteindelijk een samenhangende figuur zonder kruisingen, dus een cirkel. Dan zegt een stelling van Jordan dat (een figuur homeomorf met) een cirkel een buiten- en een binnengebied heeft. Toepassing hiervan leidt ertoe dat we altijd zo een dambordpatroon kunnen vinden. Hieronder staat het procédé voor de cijfer-8 knoop.



stap 1 en stap 2



stap 3 en stap 4

We gaan nu weer uit van een gegeven samenhangend gereduceerd schakeldiagram en voorzien dit diagram van een dambordpatroon. Met dit dambordpatroon kunnen we de kruisingen in dit diagram opheffen en wel zó dat de zwarte gebieden met elkaar verbonden worden. Het resultaat T is een van de 2^k 'toestanden' die we vonden bij de berekening van het Kauffman-haakje. Als $k(K)$ het aantal kruisingen in K is, dan is volgens het daar gedefinieerde procédé de bijdrage van deze 'toestand' T aan het Kauffman-haakje de uitdrukking

$$(-A^2 - A^{-2})^{\ell(T)-1} A^{k(K)},$$

omdat we bij iedere kruising een A gezet hebben. Dus de term van de hoogste graad die deze toestand T levert is

$$(-1)^{\ell(T)-1} A^{k(K)+2\ell(T)-2}.$$

Wat leveren de andere toestanden op? Merk hier op dat de uitdrukking $\ell(T)$ het aantal witte gebieden is dat overblijft na opheffing van de kruisingen.

De bewering is nu dat alle andere toestanden alleen termen van lagere graad leveren in hun bijdrage aan het Kauffmanhaakje. Neem een andere toestand T'. Stel die kan uit T worden verkregen door in één kruising niet de twee zwarte, maar de twee witte gebieden met elkaar te verbinden. Maar dat betekent dat er in T' een wit gebied minder is doordat twee witte gebieden met elkaar zijn verbonden; waren die twee witte gebieden al verbonden, dan was het diagram niet gereduceerd. Verder is er een A vervangen door een A^{-1}. Dus de 'toestand' T' levert een uitdrukking

$$A^{k(K)-2}(-A^2 - A^{-2})^{\ell(T)-2}.$$

De graad hiervan is 4 minder dan de bijdrage van T. Een precieze analyse leert dat de hoogste en laagste graad van de termen in het Kauffmanhaakje van K zijn

$$\text{max. graad} = k(K) + 2W - 2, \qquad \text{min. graad} = -k(K) - 2Z + 2, \qquad (2)$$

waar W en Z het aantal witte en zwarte gebieden aanduiden.

De *spanwijdte* van een knoopdiagram is nu per definitie het verschil tussen hoogste en laagste graad in het Kauffmanhaakje. Maar we weten dat het polynoom $P_K = (-A^3)^{-w(K)}\mathcal{K}(K)$ een invariant van de knoop is. Het verschil tussen hoogste en laagste graad in P_K is duidelijk gelijk aan dat in $\mathcal{K}(K)$. Dus de spanwijdte van een knoop is een invariant van de knoop.

Volgens het resultaat (2) is dit verschil gelijk aan

$$\begin{aligned}\text{spanwijdte}(K) &= 2k(K) + 2(W+Z) - 4 \\ &= 2k(K) + 2G - 4,\end{aligned}$$

met G het aantal gebieden in ons diagram. Het verband tussen het aantal gebieden en het aantal kruisingen is $G = k(K) + 2$. Dit zie je in door een knopendiagram te tekenen en te kijken wat er gebeurt als je een kruising toevoegt. Dus als we dit substitueren vinden we

$$\begin{aligned} \text{spanwijdte}(K) &= 2k(K) + 2G - 4 \\ &= 4k(K). \end{aligned}$$

Dus is het aantal kruisingen $k(K)$ van een alternerend gereduceerd diagram een invariant van de knoop. Q.E.D.

Opmerking. Het bewijs leert ons ook dat de term van de hoogste en laagste graad in P_K als coefficient ± 1 hebben. Verder is het aantal kruisingen dus precies de spanwijdte van het Jonespolynoom als Laurentpolynoom in t.
Voorbeeld. De cijfer-8-knoop heeft Jonespolynoom $V_K = t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2$ met spanwijdte 4. Inderdaad zijn er in ons diagram 4 kruisingen.

Met wat meer werk kan men ook bewijzen dat het aantal kruisingen van een gereduceerde alternerende projectie van een knoop minimaal is voor alle projecties van deze knoop. Ook dit was een vermoeden van Tait.

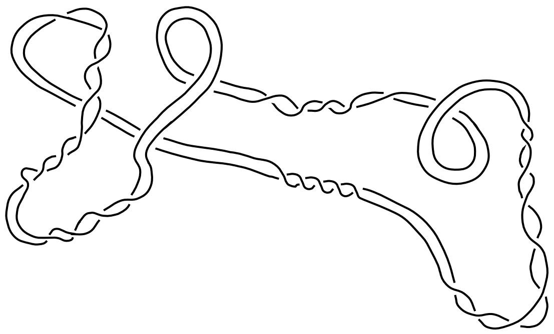
Deze vermoedens van Tait konden worden opgeruimd, maar vele andere vermoedens stammend uit de tijd van de eerste classificatiepogingen zijn gebleven. Zoals bijvoorbeeld het volgende vermoeden van Tait uit 1890. Onder het *kruisingsgetal* van een knoop wordt het minimale aantal kruisingen in een projectie van de knoop verstaan.

Vermoeden. (Tait) *Als het kruisingsgetal van een knoop oneven is, dan is de knoop niet van hetzelfde type als zijn spiegelbeeld.*

Onze klaverbadknoop is een voorbeeld; het aantal kruisingen is 3 en we weten al met behulp van de invariant P_K dat het type van deze knoop verandert als we spiegelen, dwz. als we alle kruisingen in het diagram vervangen door de tegengestelde kruisingen.

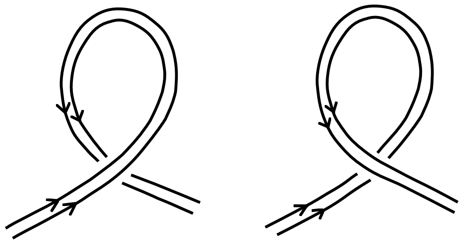
DNA-verstrengelingen

We nemen weer een knopendiagram en vervangen de draad door een gummi-band. We noemen het resultaat een DNA-verstrengeling of DNA-schakel. De beide randen leveren dan een schakel van twee cirkelvormige figuren die we C en C' noemen. Dat ziet er dan bijvoorbeeld zo uit:



DNA-verstrengeling

Ik hoop dat U zich de definitie van het schakelgetal nog herinnert. De twee cirkelfiguren C en C' hebben een schakelgetal. Maar in deze situatie kunnen we nog twee andere getallen definiëren, de *torsie* en de *draaiing*. Om de torsie te definiëren nemen we aan dat de beide zijden van onze gummiband een verschillende kleur hebben, zeg rood en groen. De torsie geeft aan hoe vaak we een kleurverandering zien in het diagram (rood/groen of groen/rood). Voor de draaiing tellen we hoe vaak (met voorteken) de gummiband zichzelf snijdt:

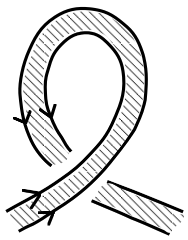


draaiing -1 en draaiing $+1$

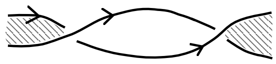
Er is dan een formule die deze drie getallen met elkaar verbindt:

$$\text{schakelgetal} = \text{torsie} + \text{draaiing}, \qquad \ell = t + d$$

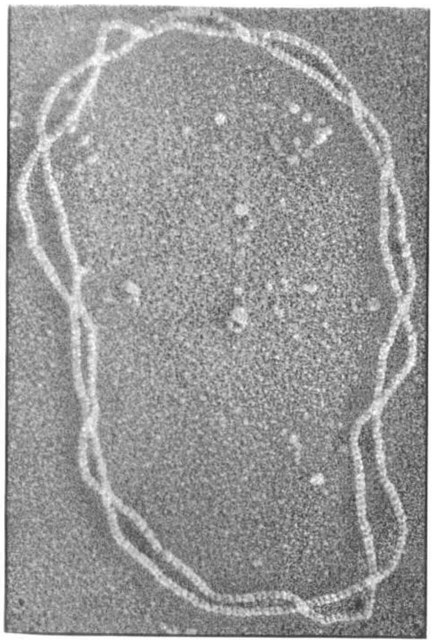
Om deze formule in te zien kijk je gewoon naar de verandering die optreedt als de verstrengeling lokaal strakgetrokken wordt:



wordt



Deze twee-dimensionale formule heeft een generalisatie voor DNA-verstrengelingen in de driedimensionale ruimte. Deze generalisatie (Formule van White) ziet er precies zo uit, maar de definitie van t en d zijn wat moeilijker. Voor de skeptici kan men deze formule met een riem illustreren; de telefoondraad tussen hoorn en toestel vertoont een analoog gedrag. Maar deze formule heeft een veel diepere toepassing in de natuur. Het volgende plaatje toont een DNA-verstrengeling (uit [S2]).



Een DNA-knoop

Ik ga ervan uit, dat U weet dat iedere cel van een levend wezen DNA bevat waarin de genetische informatie opgeslagen is. Om een idee van de orde van grootte te geven: als we een model van de cel zo groot als een voetbal maken dan moet dit model ongeveer 200 km aan vissnoer (hengeldraad) als DNA bevatten. Het is moeilijk voorstelbaar dat een dergelijke hoeveelheid niet in de knoop raakt. De cel heeft dus kennis van de knopentheorie nodig om te kunnen functioneren, en zij maakt zeer subtiel gebruik van deze kennis. Zo schijnen er enzymen te bestaan die het schakelgetal van een DNA-verstrengeling veranderen, maar de torsie onveranderd laten. Volgens bovenstaande formule of de formule van White moet dan de draaiing veranderen. Daarmee kan het DNA kompakter of juist veel minder kompact gemaakt worden. Mijn kennis van de biologie is te gering om hier verder over uit te weiden. Biologen verzekeren mij dat de formule van White en andere resultaten uit de knopentheorie hun weg in de moleculaire biologie hebben gevonden.

Zoals zo vaak is een heel deelgebied van de wiskunde ontstaan uit de wens een onderdeel van de natuur beter te begrijpen; dit deelgebied heeft zich dan zelfstandig als zuivere wiskunde verder ontwikkeld om dan tenslotte weer te leiden tot volledig onverwachte en diepe toepassingen op een volslagen ander gebied.

Literatuur

[A] C.C. Adams: *The Knot Book.* Freeman 1994.

[As] C. Ashley: *The Ashley Book of Knots.* Doubleday and Co. New York, 1944.

[BCW] W.R. Bauer, F.H.C. Crick, J.H. White: Supercoiled DNA. *Scientific American* **243**, 1980, p. 118-133.

[K] L.H. Kauffman: *Knots and Physics.* Second edition. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1993. xiv+723 pp.

[J] V.F.R. Jones: A polynomial invariant for knots and links via Van Neumann algebras. *Bull. Am. Math. Soc.* **12**, (1985), p. 103–111.

[L] J.B. Listing: *Vorstudien zur Topologie.* Göttingen, 1848.

[R] L. Reidemeister: *Knotentheorie.* Julius Springer, Berlin, 1932.

[Ro] D. Rolfsen: *Knots and Links.* Math. Lect. Series 7. Publish or Perish Press (1976).

[S1] D.W. Sumners: Untangling DNA. *The Mathematical Intelligencer* **12**, (1990), p. 71–80.

[S2] D.W. Sumners: Lifting the curtain: using topology to probe the hidden action of enzymes. *Notices Amer. Math. Soc.* **42** (1995), no. 5, p. 528–537.

[T] William P. Thurston: Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1. Edited by Silvio Levy. Princeton Mathematical Series, 35. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

Toelichting. Als eerste inleiding in de knopentheorie kan het boek van Adams worden aanbevolen. Het bespreekt op toegankelijke wijze vele aspecten van de knopentheorie. De tabellen achterin zijn niet betrouwbaar omdat er twee notaties van knopen (de klassieke en die van Thistletwaite) worden verwisseld. Het boek van Ashley is een omvangrijk niet-wiskundig curiosum uit 1944 met een indrukwekkende verzameling van knopen uit het dagelijkse leven. Het boek van Thurston behandelt delen van de meetkunde/topologie die ook voor de knopentheorie belangrijk zijn en kan ook worden aanbevolen voor verdere studie.